Reflexão e refracção

Desvios, reflexão interna total e arco-íris



Três perguntas

- Porque é que uma palhinha parece partida num copo de água?
- Porque é que um diamante brilha tanto?
- Será que se pode ver um arco-íris completo?

O que vamos precisar

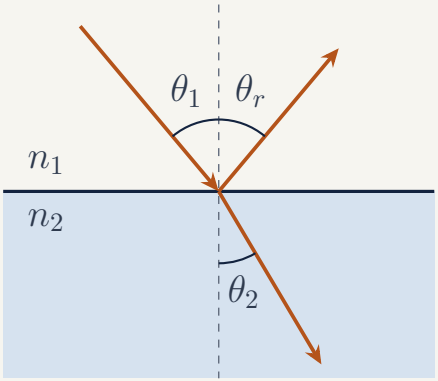
As duas leis

Deduzidas a partir de Fermat e de Huygens:

$$\theta_r = \theta_1, \qquad n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Ângulos medidos a partir da normal.

Índices: ar $1{,}00$; água $1{,}333$; vidro $1{,}5$; diamante $2{,}42$.



O que vamos precisar

Ângulos pequenos

Para ângulos pequenos, em radianos, $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$:

θ	θ (rad)	$\sin\theta$	$\tan\theta$
5°	$0{,}0873$	$0{,}0872$	$0{,}0875$
10°	$0{,}1745$	$0{,}1736$	$0{,}1763$
20°	$0{,}3491$	$0{,}3420$	$0{,}3640$

Até cerca de 10°, as três diferem menos de $2\,\%$.

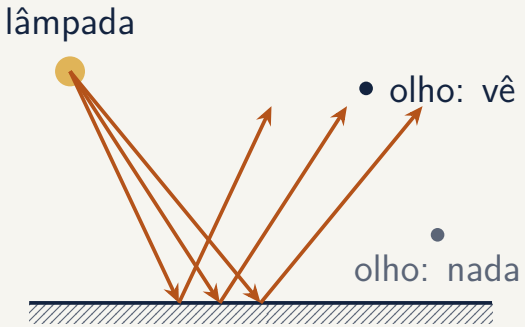
Reflexão

Superfície lisa: um espelho

Normais todas paralelas: a luz da lâmpada sai numa só direcção.

O olho nessa direcção vê a lâmpada reflectida; fora dela, nada.

Um espelho perfeito não se vê: vê-se o que ele reflecte.



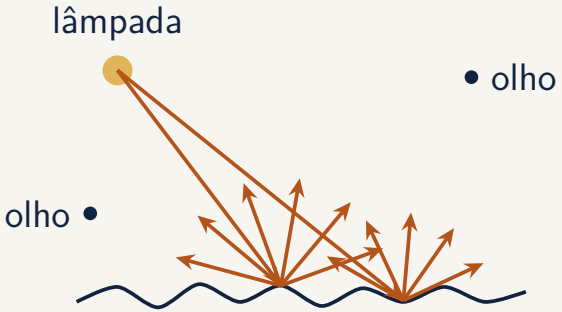
Reflexão

Superfície rugosa: vemos o objecto

Normais em todas as direcções: cada ponto espalha a luz para todos os lados.

De qualquer posição, chega luz de todos os pontos: vemos a superfície.

Quase tudo o que vemos não emite luz: espalha-a.

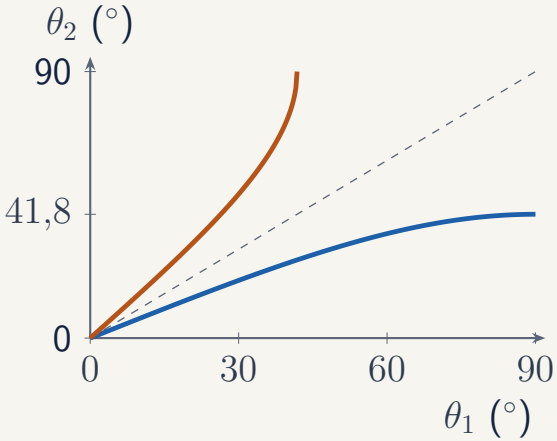


REFRACÇÃO

Como se desvia o raio refractado

Lei de Snell com $n = 1{,}5$:

- ar para vidro: aproxima-se da normal. Mesmo com $\theta_1 = 90°$, $\sin\theta_2 = 1/1{,}5$: $\theta_2 \leq 41{,}8°$;
- vidro para ar: afasta-se; chega a $90°$ com $\theta_1 = 41{,}8°$.



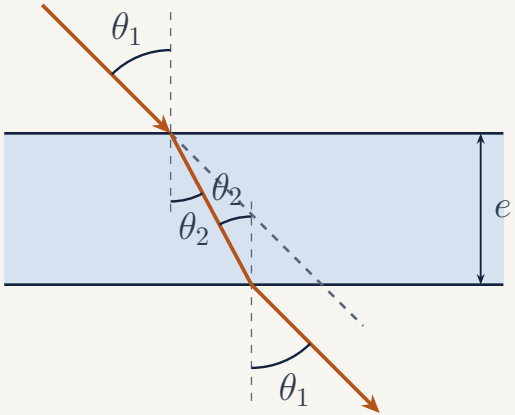
Lâmina
O raio sai paralelo

Na primeira face: $\sin\theta_1 = n\sin\theta_2$.

Faces paralelas: o raio chega à segunda com o mesmo θ_2:

$$n\sin\theta_2 = \sin\theta_1' \;\Rightarrow\; \theta_1' = \theta_1$$

Sai com a direcção inicial (tracejado), deslocado.



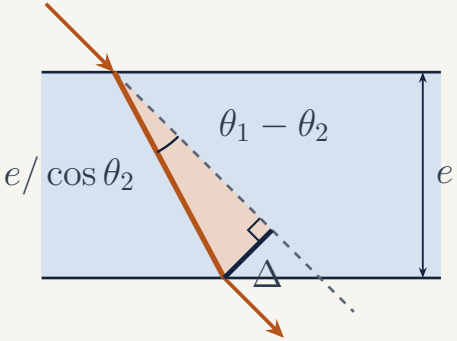
Lâmina

O deslocamento

No vidro, o raio percorre $e/\cos\theta_2$ e afasta-se da direcção inicial (tracejado) de $\theta_1 - \theta_2$. O deslocamento é o cateto oposto:

$$\Delta = \frac{e\,\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_2}$$

$e = 1{,}0\,\text{cm}$, $\theta_1 = 45°$, $n = 1{,}5$: $\theta_2 = 28{,}1°$ e $\Delta = 0{,}33\,\text{cm}$.



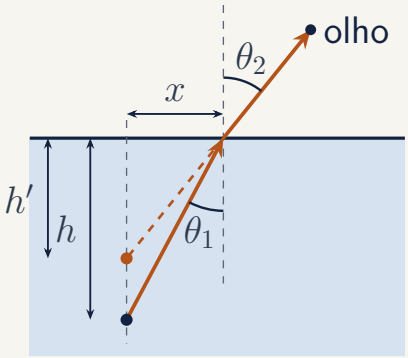
Profundidade aparente

A geometria

Porque é que uma palhinha parece partida num copo de água?

Um raio sai da água à distância x da vertical. O olho prolonga-o para trás e vê o objecto em h' (laranja).

$$\tan\theta_1 = \frac{x}{h}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{x}{h'}$$



Profundidade aparente

Ângulos pequenos

Porque é que uma palhinha parece partida num copo de água?

Olhando quase na vertical, os ângulos são pequenos: $\sin\theta \approx \tan\theta$. A lei de Snell fica

$$n_1 \frac{x}{h} = n_2 \frac{x}{h'} \quad \Rightarrow \quad h' = h \frac{n_2}{n_1}$$

n_1: objecto; n_2: observador. Água para ar: $h' = 0{,}75\, h$.

RESPOSTA

A palhinha partida

Porque é que uma palhinha parece partida num copo de água?

- Cada ponto da parte mergulhada parece estar a $0{,}75$ da sua profundidade real.
- A parte de dentro de água parece subir; a de fora fica onde está.
- Na superfície, as duas partes não se juntam: a palhinha parece partida.

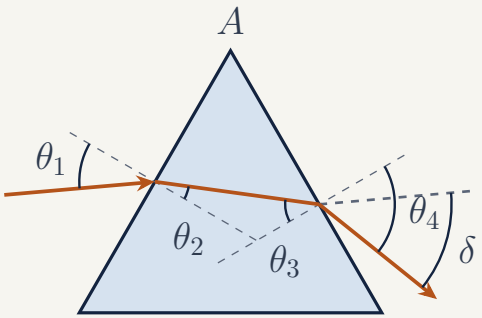
Uma piscina com $2{,}0\,\text{m}$ parece ter $1{,}5\,\text{m}$.

Prisma
O desvio

δ: quanto o prisma vira a luz. Depende de n, logo da cor: separa as cores e permite medir n.

Cada face desvia $\theta_1 - \theta_2$ e $\theta_4 - \theta_3$. Como $\theta_2 + \theta_3 = A$ (a seguir), somando:

$$\delta = \theta_1 + \theta_4 - A$$



Tracejado: normais e direcção inicial.

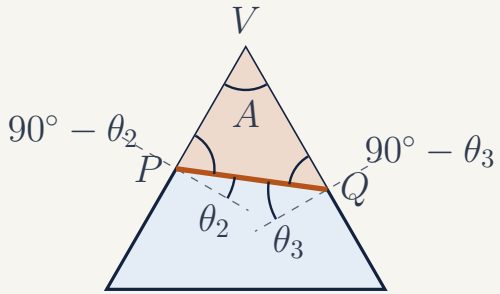
Prisma

Porque $\theta_2 + \theta_3 = A$

Triângulo VPQ (laranja). Em V: o ângulo A.

Em P, a normal faz $90°$ com a face; o raio faz θ_2 com a normal, logo $90° - \theta_2$ com a face.

Em Q, do mesmo modo: $90° - \theta_3$.



$$A + (90° - \theta_2) + (90° - \theta_3) = 180° \;\Rightarrow\; \theta_2 + \theta_3 = A$$

Prisma

Um exemplo

$A = 60°$, $n = 1{,}52$, $\theta_1 = 50°$:

primeira face	$\sin\theta_2 = \sin 50°/1{,}52 \Rightarrow \theta_2 = 30{,}3°$
dentro	$\theta_3 = A - \theta_2 = 29{,}7°$
segunda face	$\sin\theta_4 = 1{,}52 \sin 29{,}7° \Rightarrow \theta_4 = 48{,}9°$
desvio	$\delta = 50 + 48{,}9 - 60 = 38{,}9°$

$\theta_2 \approx \theta_3$: perto do **desvio mínimo**, raio paralelo à base. Daí se mede n:

$$n = \sin\frac{A + \delta_{\min}}{2} \Big/ \sin\frac{A}{2}$$

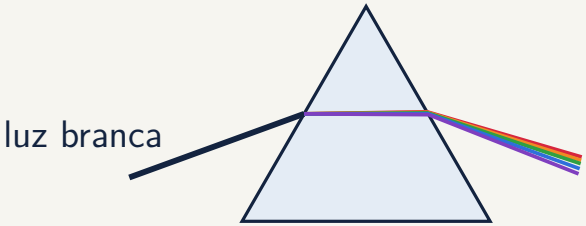
Prisma

A decomposição da luz branca

O índice depende da cor: o violeta tem n maior e desvia-se mais do que o vermelho.

A luz branca abre-se num leque de cores.

Na figura, a separação está exagerada seis vezes.



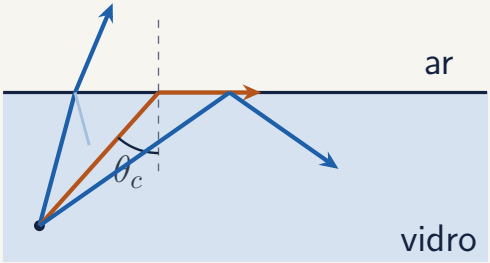
Reflexão interna total

Porque é que um diamante brilha tanto?

Do vidro para o ar, o raio afasta-se da normal.

Aumentando θ_1, o refractado chega a 90° em $\theta_1 = \theta_c$ (laranja).

Para $\theta_1 > \theta_c$, não há raio refractado: toda a luz é reflectida.



Azul claro: parte reflectida.

REFLEXÃO INTERNA TOTAL

O ângulo crítico

Porque é que um diamante brilha tanto?

No limite, $\theta_2 = 90°$:
$n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin 90° = n_2$.

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad (n_1 > n_2)$$

Para $\theta_1 > \theta_c$ seria $\sin\theta_2 > 1$: não há refracção.

para o ar, de	n_1	θ_c
água	$1{,}333$	$48{,}6°$
vidro	$1{,}5$	$41{,}8°$
diamante	$2{,}42$	$24{,}4°$

RESPOSTA

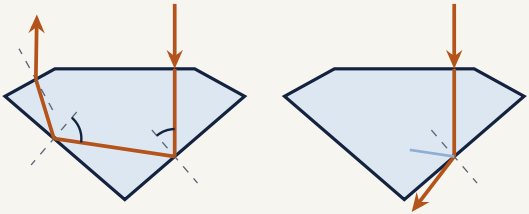
O brilho do diamante

Porque é que um diamante brilha tanto?

Mesmo corte, luz a entrar por cima. No fundo, bate a 41° da normal.

Diamante: $41^\circ > 24{,}4^\circ$. Reflexão total, duas vezes: sai por cima.

Vidro: $41^\circ < 41{,}8^\circ$: escapa pelo fundo.



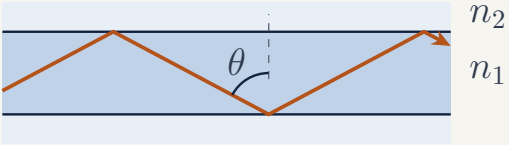
Fibra óptica

A luz presa

Núcleo de índice n_1, revestimento de índice $n_2 < n_1$.

O raio bate sempre com o mesmo $\theta > \theta_c$: reflexão total.

Reflecte $100\,\%$. Um espelho com $95\,\%$ perdia quase tudo em cem reflexões.



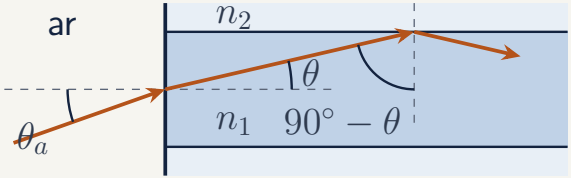
Diferença de índices exagerada.

Fibra óptica

A abertura numérica

À entrada: $\sin\theta_a = n_1 \sin\theta$.
Fica preso se $90^\circ - \theta \geq \theta_c$.

Abertura numérica, AN: o seno do maior θ_a aceite.

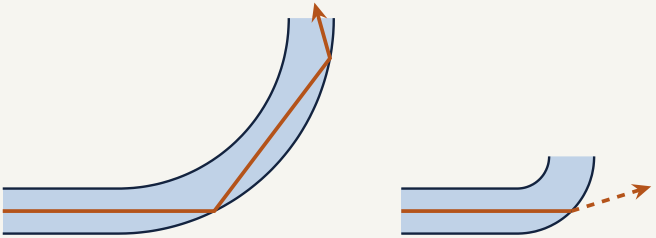


$$\text{AN} = n_1 \sin(90^\circ - \theta_c) = n_1 \cos\theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Fibra óptica

As curvas

Curva suave: bate na parede rasante, acima de θ_c, e segue. Curva apertada: bate de frente, abaixo de θ_c, e escapa (tracejado).



curva suave

curva apertada

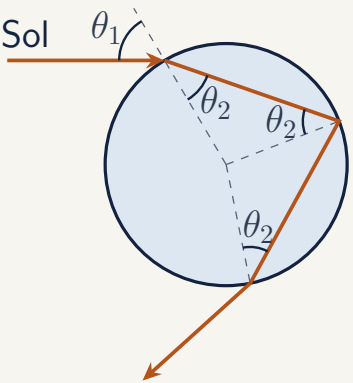
Arco-íris

O caminho numa gota

A luz entra, reflecte-se no fundo e sai. Os raios da gota (tracejado) fazem triângulos isósceles: dentro, o ângulo é sempre θ_2.

Cada refracção desvia $\theta_1 - \theta_2$; a reflexão, $180^\circ - 2\theta_2$:

$$D = 180^\circ + 2\theta_1 - 4\theta_2$$



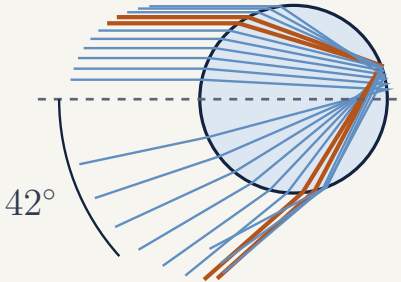
Arco-íris

Muitos raios, uma direcção

A luz do Sol chega à gota em raios paralelos, a alturas diferentes.

Cada um sai numa direcção diferente, mas muitos saem perto de 42° da direcção do Sol (laranja).

Nessa direcção, a gota brilha muito mais.



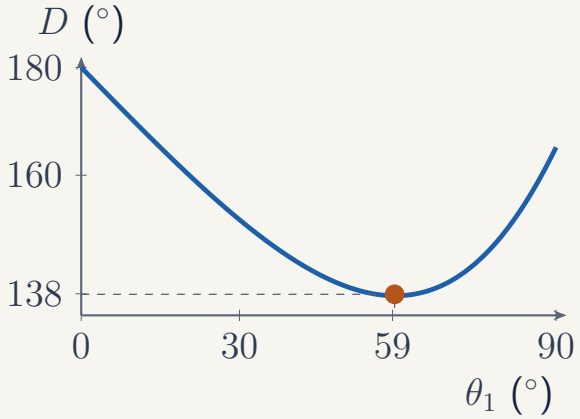
Arco-íris

O desvio mínimo

D: quanto a gota vira o raio. Depende da altura a que o raio bate, logo de θ_1.

Raio central: $D = 180°$, volta para trás. Subindo, D diminui até $138°$, perto de $\theta_1 = 59°$, e volta a subir.

Nenhum raio é virado menos: é o **desvio mínimo**.



Arco-íris

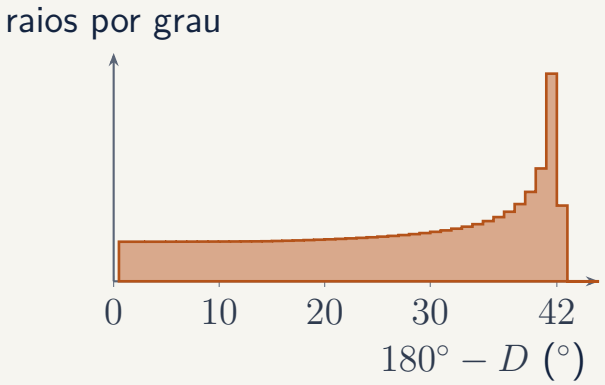
A luz concentra-se

No mínimo a curva é plana: muitos raios saem com quase o mesmo D. Pico a $180° - D_{\min} = 42°$.

De $\mathrm{d}D/\,\mathrm{d}\theta_1 = 0$:

$$\cos\theta_1 = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$$

Água: $\theta_1 = 59{,}4°$.



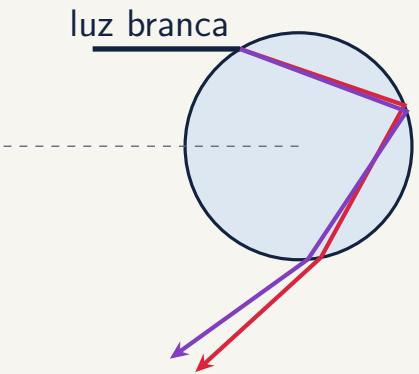
Arco-íris

As cores

O índice da água depende da cor: $1{,}331$ no vermelho, $1{,}343$ no violeta.

O violeta desvia-se mais em cada refracção e sai mais perto da direcção do Sol:

vermelho a $42{,}4°$, violeta a $40{,}6°$.



Separação exagerada quatro vezes.

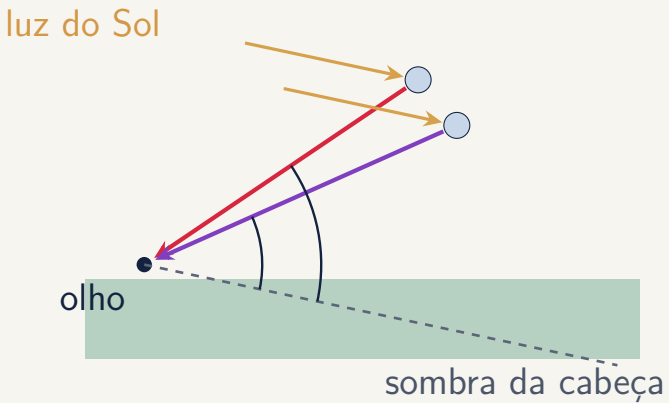
Arco-íris

Onde se vê

A sombra da cabeça marca a direcção oposta ao Sol.

Gotas a $42{,}4°$ dela mandam vermelho ao olho; a $40{,}6°$, violeta.

Para ver o arco é preciso juntar muitas gotas.

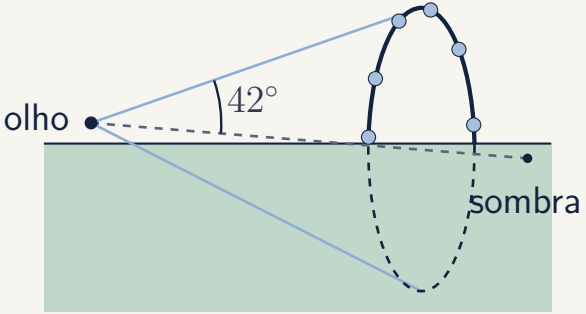


Arco-íris

O cone de 42°

Não é uma gota que faz o arco: são milhões, cada uma a mandar ao olho só um ponto de cor.

Brilham as que estão a 42° da sombra da cabeça. Estão todas num cone, com vértice no olho e eixo na direcção da sombra.



Arco-íris

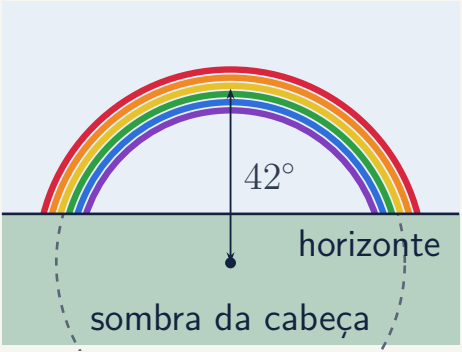
Porque é um arco

Será que se pode ver um arco-íris completo?

O cone é um círculo de 42° à volta da sombra da cabeça.

A sombra está abaixo do horizonte: o chão corta o círculo.

Sol acima de 42°: não há arco.



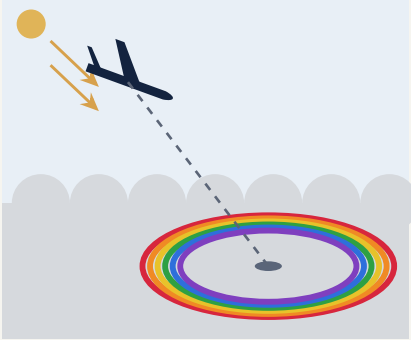
RESPOSTA

O arco-íris completo

Será que se pode ver um arco-íris completo?

No chão, a metade de baixo do círculo cai onde não há gotas.

De um avião, há gotas por baixo: vê-se o círculo inteiro, à volta da sombra do avião.



Arco-íris

Arco-íris e halo



Arco-íris: gotas, Sol nas costas.



Halo de $22°$: gelo, Sol no centro.

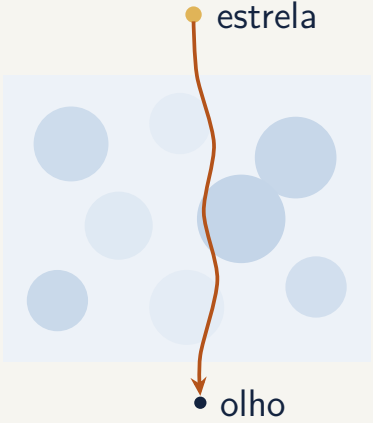
Ambos são desvios mínimos. O cristal de gelo é um prisma de $60°$, $n = 1{,}31$: $\delta_{\min} = 22°$.

Regresso à última aula

Porque tremem as estrelas

O ar turbulento tem bolsas quentes e frias, de centímetros a decímetros, com n um pouco diferente: lentes fracas, sempre a mudar.

A luz de uma estrela, um ponto, atravessa uma só coluna de ar: brilho e posição mudam dezenas de vezes por segundo.



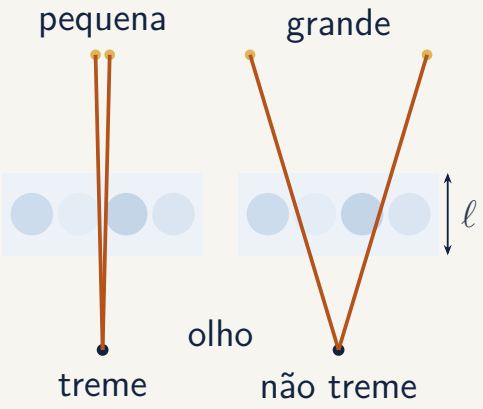
Regresso à última aula

Fonte pequena, fonte grande

Dois pontos da fonte, a um ângulo α: à distância x, raios afastados αx.

$\alpha x \ll \ell$: mesma bolsa, tremem juntos.

$\alpha x \gg \ell$: bolsas diferentes; as flutuações compensam-se.



Regresso à última aula

Estrelas, planetas e candeeiros

Bolsas de $\ell \approx 10\,\text{cm}$ a $x \approx 5\,\text{km}$ de altura: $\ell/x \approx 2 \times 10^{-5}\,\text{rad} \approx 4''$.

fonte	tamanho aparente	treme?
estrela	$0{,}001''$	muito
Marte, Júpiter	$10''$ a $45''$	quase nada
candeeiro a $50\,\text{m}$	$20'$	não
candeeiro a $15\,\text{km}$	$4''$	sim

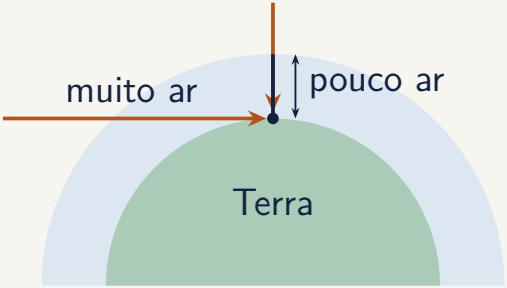
Ao longe, o candeeiro parece pequeno e a luz atravessa muito ar.

Regresso à última aula

O horizonte e os observatórios

Perto do horizonte é pior: a luz atravessa muito mais ar. Com a dispersão, uma estrela baixa até muda de cor.

Os astrónomos chamam-lhe **seeing**: os observatórios ficam no alto das montanhas, acima de parte do ar.



ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Um prisma de vidro crown tem $A = 60°$, com $n = 1{,}514$ no vermelho e $n = 1{,}522$ no azul. Um feixe de luz branca incide na primeira face com $\theta_1 = 50°$.

(a) Calcule o desvio do vermelho.

(b) Repita para o azul. Qual se desvia mais, e porquê?

(c) Que ângulo separa as duas cores à saída?

(d) Distância do ecrã para as cores ficarem a $1\,\text{cm}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a, b) Os mesmos quatro passos do exemplo, com $\sin 50^\circ = 0{,}766$:

	$\theta_2 = \arcsin \dfrac{0{,}766}{n}$	$\theta_3 = A - \theta_2$	θ_4	δ
vermelho	$30{,}40^\circ$	$29{,}60^\circ$	$48{,}41^\circ$	$38{,}41^\circ$
azul	$30{,}22^\circ$	$29{,}78^\circ$	$49{,}11^\circ$	$39{,}11^\circ$

O azul, com n maior, desvia-se mais nas duas faces.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(c) As duas cores saem a fazer o ângulo

$$\Delta\delta = 39{,}11 - 38{,}41 = 0{,}70^\circ = 0{,}0122\,\text{rad}$$

(d) Num ecrã à distância D, a separação é $D\,\Delta\delta$. Uma diferença de índice de $0{,}008$ chega:

$$D = \frac{1{,}0\,\text{cm}}{0{,}0122} = 82\,\text{cm}$$

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Uma fibra tem núcleo com $n_1 = 1{,}48$ e revestimento com $n_2 = 1{,}46$, e $1{,}0\,\text{km}$ de comprimento.

(a) Calcule o ângulo crítico na parede.

(b) Calcule a abertura numérica e o ângulo máximo de aceitação.

(c) Quanto tempo demora um raio pelo eixo?

(d) Um raio que bate na parede exactamente em θ_c chega quanto tempo depois?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) $\sin\theta_c = 1{,}46/1{,}48 = 0{,}9865 \Rightarrow \theta_c = 80{,}6^\circ$

(b) Com a fórmula da abertura numérica:

$$\text{AN} = \sqrt{1{,}48^2 - 1{,}46^2} = \sqrt{0{,}0588} = 0{,}242, \qquad \theta_a = 14{,}0^\circ$$

(c) Pelo eixo, com $v = c/n_1$:

$$t_0 = \frac{L\,n_1}{c} = \frac{1000 \times 1{,}48}{3{,}00 \times 10^8} = 4{,}933\,\mu\text{s}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(d) O raio crítico faz o ângulo $90^\circ - \theta_c$ com o eixo: percorre $L/\sin\theta_c$.

$$t_c = \frac{t_0}{\sin\theta_c} = t_0\,\frac{n_1}{n_2}, \qquad \Delta t = t_0\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$$

$$\Delta t = 4933 \times 0{,}0137 = 68\,\text{ns}$$

Um impulso curto alarga-se 68 ns por quilómetro: limita o ritmo de transmissão.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

A luz que vem do ângulo entre a íris e a córnea bate na face exterior da córnea ($n = 1{,}376$) a cerca de $60°$.

(a) Calcule o ângulo crítico córnea–ar.

(b) A luz a $60°$ sai do olho?

(c) Com uma lente de contacto de $n = 1{,}50$: ângulo na lente.

(d) Menor índice da lente para a luz passar.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) Da córnea para o ar:

$$\sin\theta_c = \frac{1}{1{,}376} = 0{,}727 \;\Rightarrow\; \theta_c = 46{,}6^\circ$$

(b) $60^\circ > \theta_c$: reflexão interna total. A luz fica no olho: o ângulo entre a íris e a córnea não se vê de fora.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(c) Agora o segundo meio tem n maior:

$$\sin\theta_2 = \frac{1{,}376\sin 60^\circ}{1{,}50} = 0{,}794 \;\Rightarrow\; \theta_2 = 52{,}6^\circ$$

(d) A luz passa se $\sin\theta_2 \leq 1$:

$$n_{\min} = 1{,}376\sin 60^\circ = 1{,}19$$

Qualquer lente serve. É o gonioscópio: uma lente com um espelho envia essa luz ao médico.